

Polynome mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring

Definitionen

° In der abstrakten Algebra ist ein Polynom eine formale Summe der Form

$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, wobei die Koeffizienten a_i aus einem Ring $(R, +, \cdot)$ stammen und X (die Unbestimmte) ein formales Symbol ist.

° Zwei Polynome sind genau dann *gleich*, wenn sie in allen Koeffizienten übereinstimmen.

° Polynome werden koeffizientenweise addiert und die Multiplikation ergibt sich mit dem Distributivgesetz und aus den Regeln: $X \cdot a = a \cdot X$ für alle $a \in R$, $X^m \cdot X^n = X^{m+n}$ für natürliche

Zahlen m und n . Als Produkt ergibt sich:
$$\left(\sum_{i=0}^n a_i X^i \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^m b_k X^k \right) = \sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} \right) X^i$$

° a_0 heißt freies Glied (Absolutglied) des Polynoms f

° a_n heißt dominanter Koeffizient des Polynoms f

° $f = 0$ heißt Nullpolynom und hat laut Vereinbarung den Grad $-\infty$.

° $f = a_0 \neq 0$ heißt konstantes Polynom und hat den Grad 0.

° n heißt Grad des Polynoms $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$; man schreibt: $\text{grad}(f) = n \in \mathbb{N}$,

° Der Wert des Polynoms f an der Stelle a , ist $f(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0, a \in R$.

Mit dem Horner- Schema kann die Auswertung $f(a)$ eines Polynoms an einer bestimmten Stelle a effizient vorgenommen werden.

Nullstellen des Polynoms

° Als Nullstellen oder Wurzeln eines Polynoms werden jene Werte von x bezeichnet, für die der Polynomwert $f(x)$ Null ist. Sie sind also die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.

° Ein Polynom über einem Körper (oder allgemeiner einem Integritätsbereich) hat stets höchstens so viele Nullstellen, wie sein Grad angibt.

° Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass ein komplexes Polynom vom Grad n genau n komplexe Nullstellen $(x_k \in \mathbb{C}, k \in \{1, 2, \dots, n\})$ hat; dabei müssen Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden.

° Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad n lässt sich daher in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegen: $f = a_n (X - x_1)(X - x_2) \cdot \dots \cdot (X - x_n), x_k \in \mathbb{C}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

° Gibt es ganze Nullstellen eines Polynoms mit ganzen Koeffizienten, so sind dies Teiler des freien Gliedes. d.h. Wenn $f \in \mathbb{Z}[X], f(\alpha) = 0, \alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha | a_0$

° Gibt es rationale Nullstellen eines Polynoms mit ganzen Koeffizienten, so ist der Zähler der Wurzel Teiler des freien Gliedes und der Nenner Teiler des dominanten Koeffizienten. d.h. Wenn

$f \in \mathbb{Q}[X], f\left(\frac{p}{q}\right) = 0, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1 \Rightarrow p | a_0, q | a_n$.

° Wenn $f \in \mathbb{Q}[X], f(a + b\sqrt{c}) = 0, a, b, c \in \mathbb{Z}, \sqrt{c} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f(a - b\sqrt{c}) = 0$.

° Wenn $f \in \mathbb{R}[X], f(a + ib) = 0, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \Leftrightarrow f(a - ib) = 0$.

°. Die Anzahl der nicht reellen Wurzeln eines Polynoms mit reellen Koeffizienten ist also gerade.

° Polynome ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten haben immer mindestens eine reelle Nullstelle.

° Jedes Polynom mit reellen Koeffizienten kann als Produkt von Faktoren I. Grades und II. Grades, ohne reelle Wurzeln, geschrieben werden.

° Die Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten eines Polynoms (Beziehungen von Viète)

Wenn $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ die Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ hat, dann gelten:

$$S_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

.....

$$S_n = x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Oder kurz: $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$S = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = S_1^2 - 2S_2$$

Der Lehrsatz der Division mit Rest

° Wenn $f, g \in K[X], g \neq 0, K$ ein kommutativer Körper ist, dann gibt es die eindeutig bestimmten Polynome $q, r \in K[X], \text{grad}(r) < \text{grad}(g)$ so, dass $f = g \cdot q + r$.

° Wenn $r = 0$, dann ist f durch g teilbar.

° f ist genau dann durch g teilbar, wenn ein Polynom q existiert, so dass $f = g \cdot q$.

° f ist genau dann durch g teilbar, wenn alle Wurzeln von g auch Wurzeln von f sind.

° $\alpha \in K$ ist eine Vielfachwurzel der Ordnung m von $f \Leftrightarrow f : (X - \alpha)^m$ und $f \nmid (X - \alpha)^{m+1}$

° Wenn $\alpha \in K$ eine Vielfachwurzel der Ordnung m von f ist, dann ist $\alpha \in K$ auch eine Wurzel der (formalen) ersten Ableitung von f , eine Wurzel der (formalen) zweiten Ableitung von f u.s.w. und auch eine Wurzel der (formalen) Ableitung der Ordnung $m-1$ von f . d.h.

$$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \dots, f^{(m-1)}(\alpha) = 0.$$

° Ein Polynom $f \in K[X]$ ist zerlegbar über K (mit Koeffizienten in K)

$$\Leftrightarrow \exists g, q \in K[X], \text{grad}(g) \geq 1, \text{grad}(q) \geq 1 \text{ so, dass } f = g \cdot q.$$

° Ein Polynom $f \in K[X]$ ist unzerlegbar über K , wenn es nicht als Produkt von Polynomen vom Grad größer oder gleich 1, mit Koeffizienten in K , geschrieben werden kann.